



TITLE:

# 外場と一軸性ポテンシャルをもつ 一次元カイラルXYモデルの基底状 態

AUTHOR(S):

門馬, 道也; 堀口, 剛

---

CITATION:

門馬, 道也 ...[et al]. 外場と一軸性ポテンシャルをもつ一次元カイラル  
XYモデルの基底状態. 物性研究 1996, 66(6): 1051-1063

ISSUE DATE:

1996-09-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95930>

RIGHT:

# 外場と一軸性ポテンシャルをもつ 一次元カイラル XY モデルの基底状態

東北大学大学院情報科学研究科

門馬 道也、堀口 剛

(1996 年 4 月 26 日受理)

## Abstract

外場と一軸性ポテンシャルを持つ一次元カイラル XY モデルの基底状態の相図について調べ、関連するモデルとの比較を行い、その性質を解明する。今までに一次元カイラル XY モデルは、外場を持つ体系と一軸性ポテンシャルを持つ体系とがそれぞれ独立に調べられているが、両方のポテンシャルを持つ体系の相図は調べられていない。詳しい数値計算の結果、相図において  $\Upsilon$  点などの複雑な構造を見出した。この  $\Upsilon$  点は今まで研究されたカイラル XY モデルの基底状態の相図には見られなかった全く新しいものである。

## 1 序論

一次元カイラル XY モデルは、ラセン的スピン構造をもつ磁性体 [1, 2]、強誘電体カイラルスメクティック液晶 [3]、液晶性高分子ポリテトラフルオロエチレン [4, 5, 6]、ヘキサヘシルチオトリフェニレン (HHTT) [7, 8, 9] などのモデルハミルトニアンとして研究されている。さらに、最近、磁性薄膜の研究にも用いられている重要なモデルである [10, 11, 12]。

このモデルと類似したモデルで、広く研究されてきたモデルのひとつに Frenkel-Kontrova モデル (F-K モデル) [13] がある。Aubry [14] は F-K モデルのエネルギーが極値をとるという条件で決まる力学的平衡方程式が非線形の面積保存マッピングをつくることを用い、詳しい研究を行った。一般的にこの方法では準安定状態や不安定状態も解であり、このマッピングの解が安定であるためには、F-K モデルのように二体の相互作用ポテンシャルが厳密に下に凸でなければならない。Aubry は二体の相互作用ポテンシャルが厳密に下に凸ならば、一体のポテンシャルが与えられると連続な相転移のみが起こり得るという結果を得た。この条件を満たすモデルは回転数が悪魔の階段を示すなど興味深い特徴をもつ。Griffiths と Chou [15] はこの種のモデルを研究するために効果ポテンシャルの方法を導入した。

一軸性ポテンシャルのあるカイラルXYモデルは Banerjee と Taylor [16] によってラセン的スピン構造をもつ磁性体などのモデルとして導入された。この体系の場合、二体の相互作用のポテンシャルが変曲点を持つため、変曲点の基底状態の性質への影響が考えられる。Banerjee と Taylor は、「ポテンシャルが下に凸でないということは新しい可能性を持ち込む。だが、低いエネルギーのスピンの配置は下に凸の部分から遠く離れることはない」と仮定するのは合理的である」として研究をした。しかし、Banerjee と Taylor は定性的な結果しか与えなかった。Chou と Griffiths [17] は一体のポテンシャルについて分類を行い、外場が有限ならば変曲点は基底状態の性質を決めるのには重要ではないことを示した。Fukui と Horiguchi [18] により、このモデルが定量的に詳しく調べられた結果、基底状態は相互作用ポテンシャルが厳密に下に凸である場合と異なる特徴は見いだされなかった。

外場のあるカイラルXYモデルは Yokoi 等 [19] によって効果ポテンシャルの固有方程式を解くことにより、詳しく調べられた。このモデルは二体の相互作用エネルギーが下に凸でない部分を含み、この部分が基底状態の相図に新しい性質を導くことがわかった。

このように外場のある一次元カイラルXYモデルと一軸性ポテンシャルをもつ一次元カイラルXYモデルの基底状態の性質は解明され、各々異なった特徴をもっていることが判明した。それでは外場と一軸性ポテンシャルが競合する一次元カイラルXYモデルの基底状態の性質は、どのような特徴を示すのであろうか。これは大変興味のある問題である。この一体のポテンシャルの競合の効果は、F-K モデルについて Griffiths と Chou によって研究され、新たな相の出現が示された。

二体の相互作用ポテンシャルが下に凸でない部分を持つ F-K モデルについて、相図が複雑な様相を示すことが Bassel と Griffiths により議論された [20]。すなわち連続超縮退点や準連続終端点、有限の数の相の超縮退点と三重点の交互に現われて無限の列を作る構造、Y 点とその近傍の超縮退点によってつくられる領域（Y 点領域）などの、非常に複雑な構造が相図において見出されている。また、これらの相図における現象は、相互作用ポテンシャルの下に凸でない部分の欠陥相互作用、接合相互作用などの振るまいを調べることにより、研究されている [20, 21]。Y 点については、Bassler 等がダブルパラボラモデルを導入して Y 点とその周辺の構造を見出した [20]。

本論文では、一軸性ポテンシャルを持つカイラルXYモデルは基底状態の相図において、回転数が悪魔の階段を示し [18]、外場のあるカイラルXYモデルは連続超縮退点や準連続終端点、有限の数の相の超縮退点と三重点が交互に現われて無限の列を作る構造などの特徴を持つ [19] ことをふまえて、この二つの一体のポテンシャルが競合するカイラルXYモデルでは、今までにない新しい構造が現れることを示す。

## 2 外場と一軸性ポテンシャルをもつ一次元格子上的カイラル XY モデル

本論文で考える体系のハミルトニアンは次に与えられる。

$$H = - \sum_{n=1}^N [\cos(\theta_{n+1} - \theta_n - \alpha) + \gamma_1 \cos \theta_n + \gamma_2 \cos 2\theta_n] \quad (1)$$

ここで  $\alpha$  は自然傾角で、 $\gamma_1$  は外場の強さ、 $\gamma_2$  は一軸性ポテンシャルの強さである。以下では周期的境界条件  $\theta_{N+1} = \theta_1$  を用いる。 $\theta_n$  はスピン空間内の  $xy$  平面の  $y$  軸の正の方向から反時計まわりに測った角度であるとする。

### 2.1 ハミルトニアン の 対 称 性

まず、 $\alpha$  に対する対称性を与える。以下ではハミルトニアン  $H$  に対称性に関連したパラメータを付して表すことにする。まず、

$$H(\alpha, \{\theta_n\}) = H(\alpha + 2\pi, \{\theta_n\}) = H(-\alpha, \{-\theta_n\}) \quad (2)$$

が成り立つ。式(2)よりエネルギーは  $\alpha$  に対して周期  $2\pi$  の偶関数であるので、 $0 \leq \alpha \leq \pi$  の範囲で調べれば十分である。また、 $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  の符号については、関係式

$$H(\alpha, \{\theta_n\}, \gamma_1, \gamma_2) = H(\alpha, \{\theta_n + \pi\}, -\gamma_1, \gamma_2) \quad (3)$$

が成り立つので、 $\gamma_1$  については  $\gamma_1 > 0$  の範囲を調べればよい。しかし、 $\gamma_2$  に関しては  $\gamma_2 > 0$ 、 $\gamma_2 < 0$  のときで分けて考える必要があるが、本論文では  $\gamma_2 > 0$  のときについて調べる。 $\gamma_2 < 0$  の場合の結果については他の機会に発表する。

### 2.2 回 転 数

基底状態のスピン の 配 位 を 決 め る 量 と し て 重 要 な 量 に 回 転 数 が あ る 。 回 転 数  $q$  を 次の式で定義する。

$$q = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi L} \sum_{i=1}^L (\theta_{n+i+1} - \theta_{n+i}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi L} (\theta_{L+n+1} - \theta_{n+1}) \quad (4)$$

これは、一周周期当たりのスピンの回転の平均を表す。基底状態のスピン の 配 位 は 回 転 数 が 有 理 数 か 無 理 数 か で、その相が周期的相か非周期的相かが決まる。回転数が有理数のときは、

$$q = \frac{P}{Q} \quad (5)$$

と表される。ここで、 $P$ 、 $Q$  は正の整数で、 $Q$  は周期、 $P$  はスピンが一周周期に回転する数を表す。

### 3 数値計算とその結果

#### 3.1 数値計算の方法

本研究では Fukui と Horiguchi の方法 [18] と同じ方法で数値計算を行った。その方法を簡単に説明する。

まず、 $m \in \{1, 2, \dots, M\}$  の各々の  $m$  について、サイトあたりのエネルギー  $e_m$  を最小にするスピンの配置を決める。次に最小値の集合  $\{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  から、最小エネルギーと配位を決める。 $m$  を指定したときの最小値  $e_m$  をそのスピン配位の求め方は、 $m$  次元立方体  $([0, 2\pi)^m)$  の中からランダムにいくつか点を取り、その点でエネルギーの勾配を求め、その勾配を基にエネルギーが低い点を次々に見つけるという方法である。以下の計算は  $M = 30$  で行った。

#### 3.2 数値計算の結果

##### 3.2.1 相図の概観

$\gamma_2 = 0.3$  に対して本研究で得られた基底状態の相図を横軸に  $\alpha/2\pi$ 、縦軸に  $\gamma_1$  をとり図 1 に示した。すべての点は数値計算により得られたものである。図中の  $A, B$  の記号は Chou と Griffiths [15, 17] が F-K モデルの相図で行った定義をこのカイラル XY モデルに適用したものである。つまり、 $A$  相は配位  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  の中で  $\pi$  をとる  $\theta_i$  のない配位である。これに対して  $B$  相は配位  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  の中に必ず  $\pi$  をとる  $\theta_i$  の存在する配位である。図 1 は、外場と一軸性ポテンシャルのあるカイラル XY モデルにおいても、F-K モデルと同様に同じ回転数の相の中でパラメータの値により  $A$  相と  $B$  相に分かれる現象が起こることを示す。このような相の分離の現象は  $\gamma_1 \neq 0$  のとき横軸に  $\alpha/2\pi$ 、縦軸に  $\gamma_2$  をとって描いた相図にも、非常に小さな領域ではあるが現れることが判明した。 $\gamma_1 = 0.5$  のときの例を図 2 に示す。

図 3 に  $\gamma_2 = 0.3$ 、 $\gamma_1 = 0.2$  のときの回転数を  $\alpha/2\pi$  の関数として示す。数値計算は図 1 と同じ条件で行った。また、横軸は全部で 4000 点とった。一体のポテンシャルとして一軸性ポテンシャルのみを持つカイラル XY モデルにおいては、回転数は悪魔の階段を示すことが求められている [18]。相と相の間に別の相があるということが無限に続けば、回転数は悪魔の階段を示し、それは完全である。図 3 で示した回転数の場合は周期  $M$  を 30 と制限したことなどのため、本研究の範囲では完全であるかどうかの判断はできない。

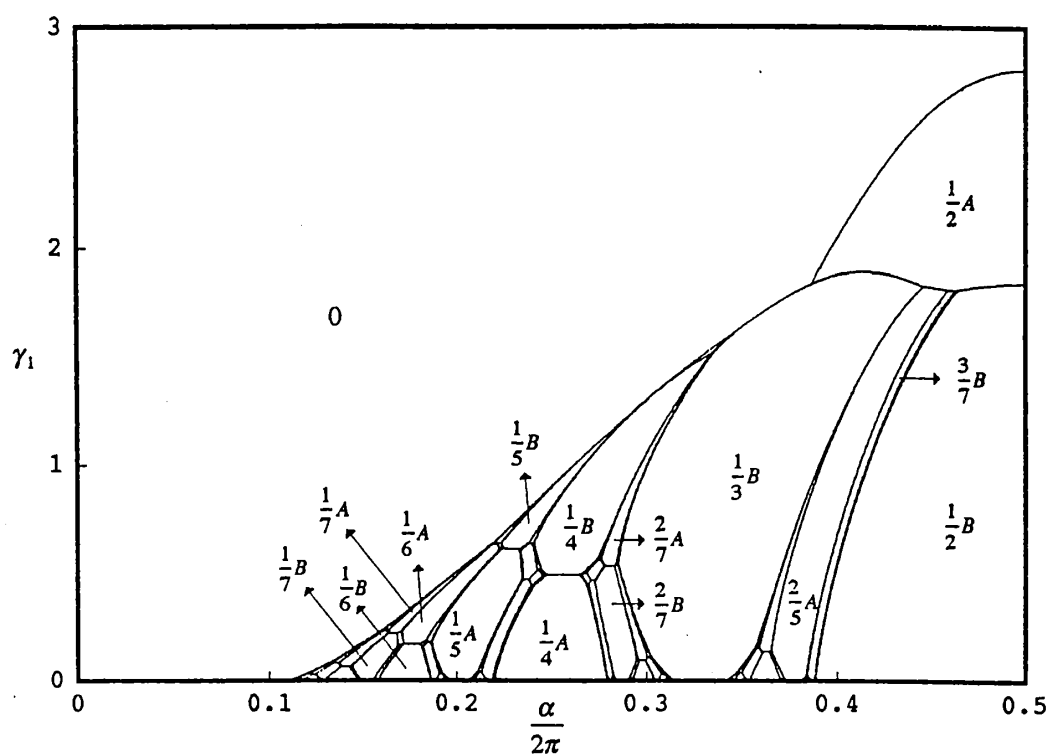


図 1:  $\gamma_2 = 0.3$  のときの相図。図中に主な相の回転数を示した。同一回転数の  $A, B$  相の境界は一次転移を示す。

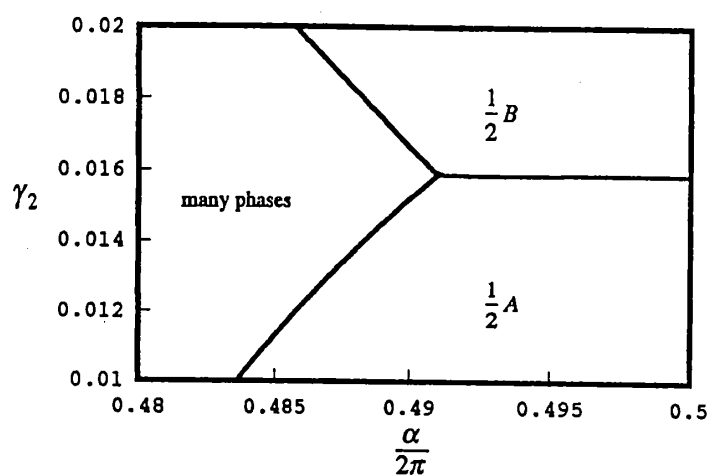


図 2:  $\gamma_1 = 0.5$  のときの相図。図中には回転数を示したが、many phases で示した領域はこの領域中に（無限）に多くの相が存在することを表す。

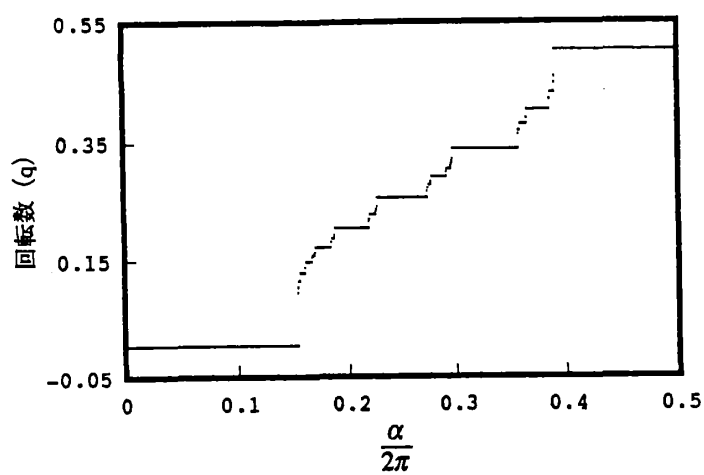


図 3:  $\gamma_2 = 0.3$ 、 $\gamma_1 = 0.2$  のときの回転数

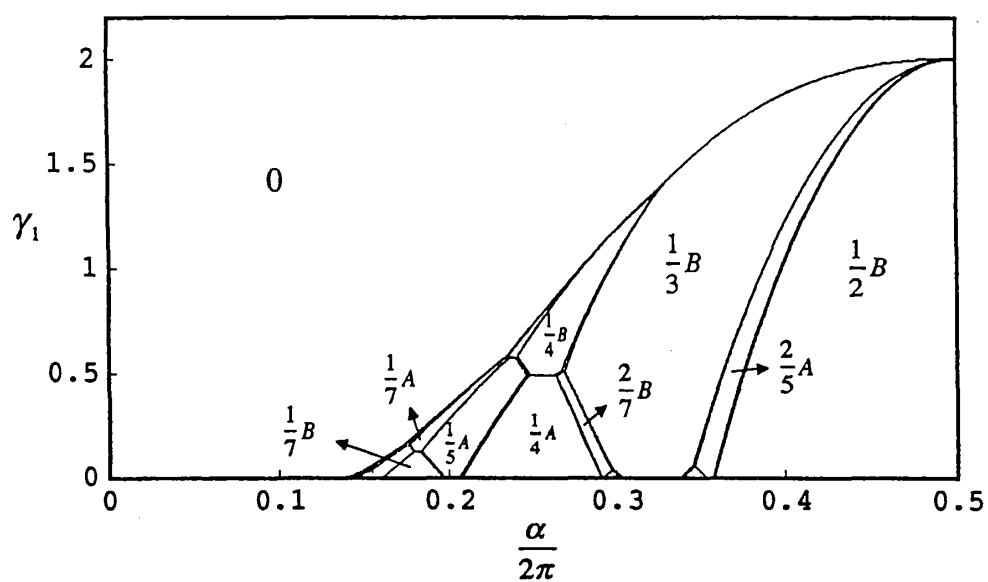


図 4:  $\gamma_2 = 0.5$  のときの相図。条件はパラメータ以外は  $\gamma_2 = 0.3$  のときの相図と同じである。

図 4 において、 $\gamma_2 = 0.5$  に固定したときの相図を示す。 $M$  の値やその他の数値計算の条件は図 1 の場合と同じである。図 1 で現れている  $q = \frac{1}{2}A$  相の領域はパラメータ  $\gamma_2$  が大きくなるにしたがって小さくなっていき、 $\gamma_2 = 0.5$  では消えてしまうということを図 4 は示している。図 5 に  $\alpha = \pi$  を固定しこの様子を理解するために、相境界を  $\gamma_1 - \gamma_2$  平面に示した。この図から、パラメータ  $\gamma_2$  が 0 のときは Yokoi 等 [19] が示したように  $q = 0$  相と  $q = \frac{1}{2}A$  相の境界線は  $\gamma_1 = 4$  となることが確認できる。 $\gamma_1 = 2$  として  $\gamma_2$  を大きくしていくと、やがて  $\frac{1}{2}B$  相の領域が大きくなり、点  $(\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0.5)$  が三重点となる。 $\gamma_2 > 0.5$  では  $\frac{1}{2}B$  相と  $q = 0$  相との境界のみが存在する。

Yokoi 等 [19] による  $\gamma_2 = 0$  のときの相図を基にして考えると、エネルギーに  $\gamma_2$  の項を加えたときの相図への影響、すなわち角度  $0, \pi$  を好む一軸性ポテンシャルの影響が現れ、これが同じ回転数の相  $A$  相と  $B$  相に分ける効果をもたらすということが理解できる。この  $A$  相と  $B$  相の境界では一次転移をし、このことは相図においていろいろな回転数に対してみられることがわかった。すなわち一次相転移をする多くの境界線が存在する。このことは、我々のモデルの相図の大きな特徴である。図 6 に  $\alpha/2\pi = 0.48$ 、 $\gamma_2 = 0.3$  を固定し、 $\gamma_1$  を 0 から 4 まで変化させたときのエネルギーと、その  $\alpha$  についての導関数の様子を示した。エネルギーの導関数の不連続な部分は一次相転移していることを示す。これらの図（計算結果）からも一次の相転移が起こることがわかる。このように、二体の相互作用ポテンシャルが厳密に下に凸であるときの相図のもつ特徴とはかなり違った特徴を示す。また、図 6 (b) で導関数がキンクになっている部分で連続転移を示す。すなわち  $q = 0$  相と  $q = \frac{1}{2}A$  相の境界は連続転移で、 $q = \frac{1}{2}A$  相と  $q = \frac{1}{2}B$  相の境界は一次転移をすることを表す。

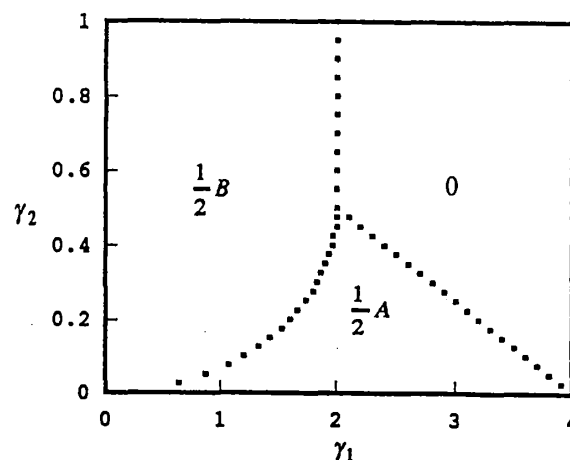


図 5:  $\alpha = \pi$  のときの相図。点  $(\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0.5)$  に三重点が存在する。



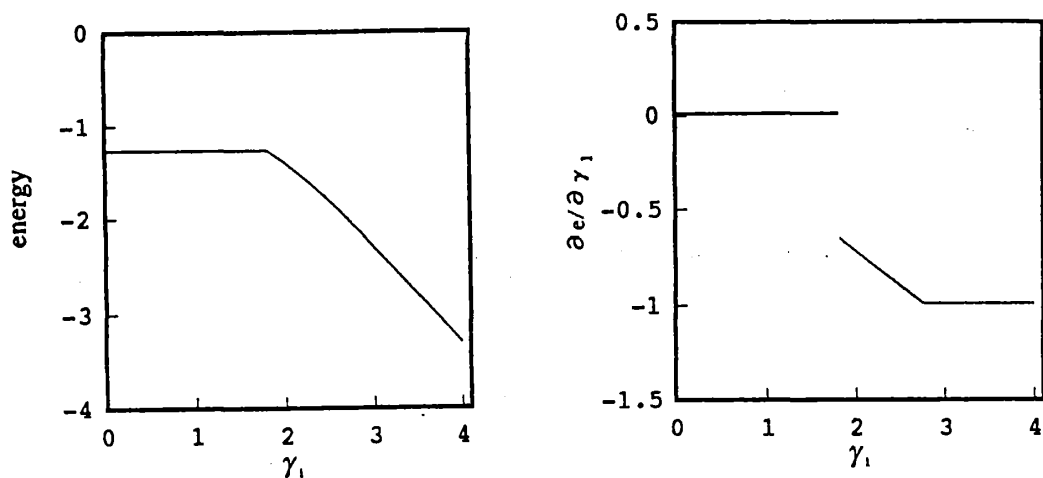


図 6: a)  $\alpha/2\pi = 0.48$ ,  $\gamma_2 = 0.3$  としたときのエネルギー、b) そのときの  $\alpha$  による微分。

次に、相図の中のいくつかの境界線を解析的に導出する。

$q = 0$  相と  $q = \frac{1}{2}A$  相の境界 スピン配置は、 $q = 0$  相で

$$\{\theta_n\} = 0$$

$q = \frac{1}{2}A$  相で

$$\{\theta_n, \theta_{n+1}\} = \{\theta, -\theta\}$$

である。これらのスピン配置をもとに両相のエネルギーを比較する。 $q = 0$  相の一格点当たりのエネルギーを  $E_0$ 、 $q = \frac{1}{2}A$  相での一格点当たりのエネルギーを  $E_{\frac{1}{2}A}$  と表すと、

$$E_0 = -(\cos \alpha + \gamma_1 + \gamma_2) \quad (6)$$

$$E_{\frac{1}{2}A} = -(\cos \alpha \cos 2\theta + \gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \cos 2\theta) \quad (7)$$

である。

また、基底状態のエネルギー  $E_{\frac{1}{2}A}$  は次の式を満たす。

$$\frac{\partial E_{\frac{1}{2}A}}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

よって、

$$\cos \theta = -\frac{\gamma_1}{4(\cos \alpha + \gamma_2)} \quad (9)$$

が成立する。よって、

$$E_{\frac{1}{2}A} = -2(\cos \alpha + \gamma_2) \left[ \cos \theta + \frac{\gamma_1}{4(\cos \alpha + \gamma_2)} \right]^2 + \cos \alpha + \gamma_2 + \frac{\gamma_2^2}{8(\cos \alpha + \gamma_2)^2} \quad (10)$$

となり、 $\cos \alpha + \gamma_2 < 0$  のとき式 (9) で決まる  $\theta$  が安定になり、 $E_{\frac{1}{2}A}$  は

$$E_{\frac{1}{2}A} = \cos \alpha + \gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{8(\cos \alpha + \gamma_2)} \quad (11)$$

となる。 $\cos \alpha + \gamma_2 < 0$  は  $q = \frac{1}{2}A$  相が出現するための必要条件である。境界線上ではエネルギーは等しいので、 $E_0 = E_{\frac{1}{2}A}$  より境界は、

$$\gamma_1 = -4(\gamma_2 + \cos \alpha) \quad (12)$$

となる。この境界線を  $C(0, \frac{1}{2}A)$  と表す。図 1 において、 $\gamma_2 = 0.3$  なので図中の境界線は  $\gamma_1 = -4(0.3 + \cos \alpha)$  となり、 $\alpha = \pi$  のとき、 $\gamma_1 = 2.8$  となる。以上のことは数値計算の結果とも一致する。つまり、境界線  $C(0, \frac{1}{2}A)$  はまさに図 1 上の境界線に一致し、点  $(\alpha/2\pi = 0.5, \gamma_1 = 2.8)$  はグラフ上の端点に一致する。図 5 において、 $\alpha = \pi$  であるから境界線は  $\gamma_1 = -4(\gamma_2 - 1)$  となり、これも計算結果と一致する。

**$q = 0$  相と  $q = \frac{1}{2}B$  相の境界**  $q = \frac{1}{2}B$  相スピン配置は、 $\{\theta_n, \theta_{n+1}\} = \{0, \pi\}$  である。 $q = 0$  相と  $q = \frac{1}{2}B$  相のスピン配置をもとにし、両相でのエネルギーを比較する。 $q = \frac{1}{2}B$  相での一格子点当たりのエネルギーを  $E_{\frac{1}{2}B}$  を表すと、

$$E_{\frac{1}{2}B} = \cos \alpha - \gamma_2 \quad (13)$$

である。よって、 $E_0 = E_{\frac{1}{2}B}$  より

$$\gamma_1 = -2 \cos \alpha \quad (14)$$

が境界となる。しかし、 $q = 0$  相と  $q = \frac{1}{2}B$  相の領域は  $\alpha/2\pi = 0.5$  以外で接しないので、 $\alpha/2\pi = 0.5$  としてよい。よって境界線は、 $q = \frac{1}{2}A$  相が出現しないときには、 $\gamma_2$  によらずに常に

$$\gamma_1 = 2 \quad (15)$$

となる。この境界線を  $C(0, \frac{1}{2}B)$  と表す。なお、この境界線は上記の理由により、図 1 には現れない。また、図 4 においても一点（三重点）のみしか現れない。 $\alpha/2\pi = 0.5$  とした相図（図 5）においては  $\gamma_2 \geq 0.5$  のときに境界線  $\gamma_1 = 2$  が現れる。

**$q = \frac{1}{2}A$  相と  $q = \frac{1}{2}B$  相の境界**  $q = \frac{1}{2}A$  相と  $q = \frac{1}{2}B$  相の境界線を求める。境界では、 $E_{\frac{1}{2}A} = E_{\frac{1}{2}B}$  となる。よって、式 (11)、(13) より

$$\gamma_1 = 4\sqrt{-\gamma_2(\cos \alpha + \gamma_2)} \quad (16)$$

を導くことができ、これが境界線となる。この境界では一次転移をする。ここで、境界線は  $\alpha$  の関数であることに注意する。相図 1 においてこの境界線は数値計算とまさに一致し、

$\alpha$  の関数である。図 1 のグラフ上での端点は、 $\alpha/2\pi = 0.5$  での  $\gamma_1$  の値は約 1.833 である。この境界線を  $C(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B)$  と表す。

図 5 において、 $\alpha = \pi$  であるから境界線は

$$\gamma_1 = 4\sqrt{\gamma_2(1-\gamma_2)} \quad (17)$$

である。このことも図 5 の結果と一致する。

**$C(0, \frac{1}{2}A)$  と  $C(0, \frac{1}{2}B)$  の関係** 二つの境界線  $C(0, \frac{1}{2}A)$  と  $C(0, \frac{1}{2}B)$  は、 $\gamma_1 > 2$  ならば  $C(0, \frac{1}{2}B)$  が  $q = \frac{1}{2}$  相と  $q = 0$  相の境界線となり、 $\gamma_1 < 2$  ならば  $C(0, \frac{1}{2}A)$  が境界線となる。式(9)、(11)、(13)より、

$$E_{\frac{1}{2}A} - E_{\frac{1}{2}B} = -(2\cos\alpha + \gamma_1) \quad (18)$$

が導かれる。これにより、 $\gamma_1 \geq -2\cos\alpha$  のときは、 $C(0, \frac{1}{2}A)$  が  $q = \frac{1}{2}$  相と  $q = 0$  相の境界線となり、 $\gamma_1 \leq -2\cos\alpha$  のときは、 $C(0, \frac{1}{2}B)$  が境界線となることがわかる。このことは、 $\gamma_2 = 0.3$  に対する数値計算の結果の図 1、5 と矛盾しない。

### 3.2.2 相図における特徴と関連するモデルとの比較

ここで、 $\gamma_2 = 0.3$  の相図の特徴についてもう少し詳しく述べる。図 1 の部分  $0.23 \leq \alpha/2\pi \leq 0.25$ 、 $0.4 \leq \gamma_1 \leq 0.7$  の拡大図を図 7 に示す。この図においても図 1 と同様に、図中の数字はその領域が各々相の回転数と A 相か B 相かということを示し、その他の領域には（無限に）多くの他の整合または非整合相が存在することを示す。

この相図においては、一般に隣りあった同回転数の相において、A 相と B 相の境界は一次転移である。そして、一般にその一次転移の境界線は  $\alpha$  軸に水平ではない。前述したように、このような同一の回転数をもつ相の中でパラメータの値により相が「分離」という現象は、F-K モデルについても現れる。しかし、F-K モデルの場合は、このような相の境界線は一般に「水平線」である [15, 17]。このことが F-K モデルの場合とカイラル XY モデルの場合の相違点の一つである。

また、F-K モデルの場合は、二体の相互ポテンシャルが厳密に下に凸であるから、カイラル XY モデルの外場の強さにあたるパラメータ  $\gamma_1$  と  $\alpha$  で描いた相図であっても、一軸性ポテンシャルの強さにあたるパラメータ  $\gamma_2$  と  $\alpha$  で描いた相図であっても、悪魔の階段は完全である。しかし、カイラル XY モデルでは、二体の相互作用ポテンシャルが厳密に下に凸であることはいえない。 $\gamma_2 = 0$  に対して Yokoi 等の求めた  $\gamma_1$  と  $\alpha$  で描いた相図では、回転数は必ずしも悪魔の階段の構造を示さず、また悪魔の階段状になる場合でもそれは一般には完全ではないと考えられている。すなわち一次転移と二次転移線が存在し、超縮退点や三重点などの複雑な構造が現れるなど、回転数が示す悪魔の階段が完全である

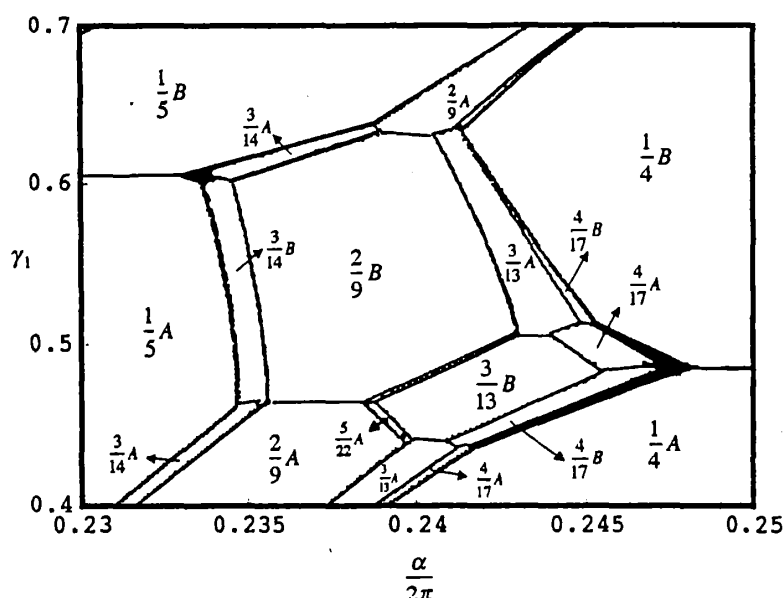


図 7:  $0.23 \leq \frac{\alpha}{2\pi} \leq 0.25$ ,  $0.4 \leq \gamma_1 \leq 0.7$  の部分の拡大図。黒く塗りつぶした部分はそこに (無限に) 多くの相が現れるが、計算精度のため境界線を書くことはできない。

と考えられるときの相図とは本質的に違った特徴を示す。 $\gamma_2 = 0$  のときでもこのような複雑な構造が現れるのであるから、 $\gamma_2 \neq 0$  の体系の相図はより複雑であるという予想がつくし、数値解析の結果、実際にその通りであった。

Bassler 等は多くの一次転移線の集積点の終点で、相境界は扇形構造をなし、その様相がギリシャ文字の  $\Upsilon$  の形をしていることから、この臨界点を  $\Upsilon$  点と定義している [21]。本研究において得られた相図にもこのような構造が見られる。すなわち図 7 においてこのような  $\Upsilon$  点の構造が非常に荒いながら、見ることができる。特に多くの相が入っていると思われる一次転移線の両端の構造は、周期  $M$  を 30 とした本研究における計算では限界があるが、 $\Upsilon$  点の存在が予想されうる。 $\Upsilon$  点の存在は F-K モデルで二体の相互作用ポテンシャルがダブルパラボラ形のとくに知られていて、相図の詳細にわたる研究が行われているが [20]、カイラル XY モデルにおいても存在することの指摘は新しい知見である。

## 4 結論

本論文は外場と一軸性ポテンシャルをもつ一次元カイラル XY モデルの基底状態の相図を求め、その性質を議論した。外場のみ、または、一軸性ポテンシャルのみをもつ一次元カイラル XY モデルは今まで詳細に研究され、基底状態の相図とその性質が議論されているが [18, 19]、それらの性質には本質的な違いがある。本論文において、外場と一軸性ポテンシャルをもつ一次元カイラル XY モデルの相図は、それらの場合と全く異なる様相を示すことを解明した。

外場と一軸性ポテンシャルをもつ一次元カイラル XY モデルの基底状態の特徴をまとめ

ると、

- 回転数が悪魔の階段構造を示すとは限らない。
- 同一回転数の相の中に  $A$  相と  $B$  相が存在する場合があります、その境界線は一般には  $\alpha$  軸に水平ではない。また、この相の境界での相転移は一次である。
- $A$  相と  $B$  相の境界は無限に存在する可能性がある。
- $\Upsilon$  点が存在する可能性がある。

となる。

本研究での数値計算は周期を  $M = 30$  と固定したために限界がある。つまり、さらに周期が長い基底状態を見つけ  $\Upsilon$  ポイントの存在を確かにし、連続超縮退点などの複雑な構造は存在を確かめるには、 $M$  を大きくして数値計算する必要がある。また、 $\gamma_1 > 0$  のときのみについて調べたが、 $\gamma_1 < 0$  のときの相図も研究する。また、一軸性ポテンシャルのあるカイラル  $XY$  モデルの有限温度の研究は Horiguchi と Fukui によって研究されており [22, 23]、この拡張として、本研究におけるカイラル  $XY$  モデルの有限温度の研究や、有限系への応用 (フィルム) も残された問題である。

さらに、三種類の一体のポテンシャルのある F-K モデルは、Sasaki と Floria によって調べられたが、 $\Upsilon$  ポイントの存在の可能性がみられる [24]。三種類の一体のポテンシャルをもつカイラル  $XY$  モデルについても  $\Upsilon$  点の存在の可能性があると考えられ、将来の課題である。

## 5 謝辞

本研究に関して、福井芳彦氏には計算機プログラム等に関して大変お世話になり、感謝いたします。

## 参考文献

- [1] T. Nagamiya, K. Nagata and Y. Kitano, Prog. Theor. Phys. **27**, 1253 (1962).
- [2] T. Morita and T. Miyadai, Solid State Commun. **42**, 209 (1982).
- [3] R. B. Meyer, L. Liébert, L. Strzelecki and P. Keller, J. Phys. Lett. (Paris) **36**, L69 (1975).

- [4] C.A. Sperati and H.W. Starkweather, Jr., Fortschr. Hochpolym. -Forsch. **2**, 465 (1961).
- [5] J.J. Weeks, I.C. Sanchez, R.K. Eby and C.I. Poser, Polymer **21**, 325 (1980).
- [6] O. Heinonen and P.L. Taylor, Polymer **32**, 2155 (1991).
- [7] M. Hébert, M.Sc. Thesis, U. de Sherbrooke (1992).
- [8] M.L. Plumer, A. Caillé, and O. Heinonen, Phys. Rev. B**47**, 8479 (1993).
- [9] T. Horiguchi and Y. Fukui, Phys. Rev. B**50**, 7140 (1994).
- [10] L. Trallori, P. Politi, A. Rettori, M.G. Pini, and J. Villain, Phy. Rev. Lett. **72**, 1925 (1994).
- [11] X. Hu and Y. Kawazoe, Phys. Rev. B**51**, 311 (1995).
- [12] X. Hu, in *Coherent Approaches to Fluctuations*, edited by M.Suzuki and N. Kawashima (World Scientific, 1996).
- [13] J. Frenkel and T. Kontorova, Phys. Z. Sowjetunion **13**, 1 (1938).
- [14] S. Aubry, Physica **7D**, 240 (1983).
- [15] R.B. Griffiths and W. Chou, Phys. Rev. Lett. **56**, 1929 (1986).
- [16] A. Banerjea and P.L. Taylor, Phy. Rev. B**30**, 6489 (1984).
- [17] W. Chou and R.B. Griffiths, Phys. Rev. B**34**, 6219 (1986).
- [18] Y. Fukui and T. Horiguchi, Physica A **199**, 580 (1993).
- [19] C.S.O. Yokoi, L.-H. Tang and W. Chou, Phy. Rev. B**37**, 2173 (1988).
- [20] K.E. Bassler and R.B. Griffiths, Phys. Rev. B**49**, 904 (1994).
- [21] K.E. Bassler, K. Sakaki, and R.B. Griffiths, J. Stat. Phys. **62**, 45 (1991).
- [22] T. Horiguchi and Y. Fukui, Sci. Rep. RITU A**40**, 271 (1995).
- [23] Y. Fukui and T. Horiguchi, Int. Inf. Sci. **1**, 133 (1995).
- [24] K. Sasaki and L.M. Floria, J. Phys. Condens. Matter **1**, 2179 (1989).